

Теория массового обслуживания

и проверка гипотез.

Лектор в конце курса обещал дать по нему материал.

Он хочет научить нас строить вероятностные модели передачи информации.отчётность - экзамен. (бюджет и теор. и задачи)
бюджет догадки (на экз. можно пользоваться конспектом)

Рассмотрим цифровую телефонную связь.

абоненты



канал.

абоненты



Сообщение - это нек. об-е и цифр, в котором есть начало, конец, sender, receiver.

~~на~~ пакет - имеет нек. размер.
(позволяет пакетную передачу данных)ЦАП - квантование по времени
по уровнюинтерфейс $\xrightarrow{\text{АЦП}}$ цифровой инф. $\xrightarrow{\text{пакетизация}}$ пакетов,которые формируются в ~~не~~ несмеш. по-мощ. времени $\rightarrow$

$\rightarrow$ передача по каналу, $\rightarrow$ мультиплексор $\rightarrow$
 знач. время - задержка
 + появляются помехи
 неизбежные потери $\rightarrow$ эхо

Экзамен:

численно, 2 вопроса

1) ~~какая~~ теоретич.матр. какие процессы бывают
2) практич.(матр. найти рекуррентной
матр. или задать цикл
Маркова через рекур.
связности)или рассмотреть частные
случай системы очереди
и разницы

Зач. дают задачи.

Пользователю можно всё, проверить
он будет именно понижение т.е.
просто переписать формулу - этого мало.у нас ~~на~~ экзамене будет на понижение,
не на док - ва, а на применение.

на консультации расскажут

больше о том, какие будут задачи
+ порешаем примеры.

Наша модель:

вход: поток инфр. инфр. в виде пакетов.
т.е. с.в.з. - средн. число пакетов, поступ. на вход.
кажд. пакет характериз. $\frac{1}{\mu}$ - мат. ожидание инфр. в пакете.

инфр. в канале нет
единств. потери - потери в буфере.
размер буфера - C

необх. изобрет. чтобы при потере нек. инфр. общ. к-во инфр. оставалось "достаточным"

$X(t)$ - число инфр. в момент t

Марковские процессы - вкратце:

это процесс, котор. развивается так:
чтобы узнать след. состояние, нам достаточно
знать текущ. сост. и не важна история

это приводит к сильным огранич. для потока,
он должен быть Пуассоновским потоком

придётся полагать, что пакет имеет фикс. размер.
показател. с.в.з.

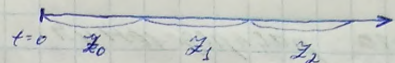
вопрос применимости этой модели - ещё
одна история

в качестве экз. закладки потери информации,
мы будем брать мат. ож. нр. $\frac{1}{\mu}$, а $\frac{1}{\mu}$

также введём вероятность переполн. буфера.

конец вводной лекции

Опр. Случайный поток событий (или просто "поток")
послед-ть с.в.з. $\{Z_n\}$
(Z_i - интервал. времени до наступления i -го события)
после $i-1$ -го события)



Опр. Рекуррентный поток

это поток, в котором с.в. $\{Z_n\}$ - независимы
и одинаково распределены

$A(t) = P(Z_k < t)$ - функция распределения $\{Z_n\}$

если рекуррентных потоков мы рассмотрим
3 вида

Самое популярное распределение на
практике - Пуассоновское (в 99% случ.)

Опр. Пуассоновский поток

Опр. Пуассоновское распределение - (показател. экспоненциальн.)

$A(t) = P(Z_k < t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0, t \geq 0$

$$EZ = \frac{1}{\alpha}$$

$$DZ = \frac{1}{\alpha^2}$$

Опр. Поток эрланга (в литературе различают
"эрланг. поток" и "общ. эрланг."
или разницы делать не будем)

$$A(t) = P(Z_k < t) = \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^j \frac{a_i}{a_i - a_{i-1}} (1 - e^{-a_{i-1}t})^{a_i - a_{i-1}}, t > 0$$

$$\tilde{A}(t) = 1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t + \dots + \frac{(\alpha t)^{N-1}}{(N-1)!})$$

в нём все a_i - одинаковы, получается из
 A , предельным переходом

Опр. Гипер-экспоненциальный поток -

$$A(t) = \sum_{j=1}^N c_j (1 - e^{-a_j t}) \quad 0 < c_j < 1 \quad \sum_{j=1}^N c_j = 1$$

Замечание:

Пуассоновское часто встречается в реальности, ~~как~~ и
нормальн. распределение встречается в статистике
(по большой предельной теореме)

аналогично как

В силу взаимных потоков и рассеивания потоков, получ. (примерно аналогично. большой предельн. теореме) Пуассоновский поток.

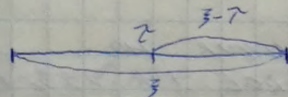
Свойства Пуассоновского распределения

1) свойство отсутствия памяти

ξ - случай. велич. с распределением $1-e^{-at}$
 τ - случай. величина, независим. от ξ

Тогда: $P(\xi < t + \tau \mid \xi \geq \tau) = 1 - e^{-at}$

□ док-во с использованием формулы полной вероятности



из св-ва след, что при уменьшении показ. распр. остается показат.

Из $\Rightarrow$ сколько бы тел. не прошло, оставшиеся всё равно имеют тоже распредел., как и в начале жизни.

(существуют и другие распределения с такой же св-вом (- дискретное, т.е. численные распр.))

2) свойство

$\xi_1, \dots, \xi_n$ - независ. сл. вел. с распределением $P(\xi_i) = 1 - e^{-a_i t}$

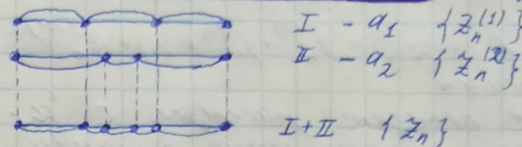
Тогда $P(\eta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)) = 1 - e^{-(a_1 + \dots + a_n)t}$

Следствие:

Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ - одинаков. распр. $\Rightarrow$
 $P(\eta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)) = 1 - e^{-nat}$, т.е.
 сл. вел.

$\min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $n\xi$ - имеют одинаков. распр.

Рассмотрим 2 потока с парам. a_1 и a_2



$$\xi_1 = \min(\xi_{01}^{(1)}, \xi_{01}^{(2)})$$

После того как случ. ξ_1 , момент наступления след. события будет с тем же показательным распределением (по свойству 1)

$\Rightarrow$ распределен. $I+II$ имеет показатель $a = a_1 + a_2$

Недостаток Пуассоновск. распр.

В Пуассон. потоке можно зафиксировать только среднее время между поступлениями (только мат. ожидание). Т.е. подобрав $E\xi = \frac{1}{a}$, у нас автоматически фиксируется $D\xi = \frac{1}{a^2}$, а на практике

часто нужно иметь возможность менять более старшие моменты пог. эксперимент (напр. дисперс.)

Если D на практике очень большая, а Пуассон. зафикс. E на $\frac{1}{a^2}$, и в итоге нам может не хватить точности для практического эксперим.

На практике фиксируя E и D - уже тарантр. нам хорошие результаты.

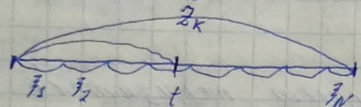
Поток эрланга и гипер-экспоненц. поток этот недостаток исправляют.

Распределение эрланга похоже на распределение

1. Z_k представимо в виде $Z_k = Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)} + \dots + Z_k^{(N)}$,
где $Z_k^{(i)}$ - независимы

- и имеют показат. распредел. с 'а'.
Тогда Z_k - имеет распределение эрланга
(кол-во параметров: $N, a_1, \dots, a_N$)

Процесс поступления можно представить так:
(последовательно - ждем $a_1, a_2, \dots$, после a_N поступит событие)



чтобы знать, ~~как~~ через
сколько у нас будет
поступление в момент t

2. Понимая, что нужно было знать
'а' - гипер. величина

достаточно просто знать

число N - дискретная, огра-
ниченная величина

Мат. ожидание эрланга: Дисперсия: $\leftarrow$ это плохо

$$E Z_k = \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j}$$

$$D Z_k = \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j^2} \gg \frac{1}{N}$$

нет недостатка Пуассона.

Коэффициент вариации: $\leftarrow$ "погрешность без
зависимости от
Е (средн. знач.)"

$$m = \frac{\sqrt{D Z_k}}{E Z_k} = \left\{ \text{для Пуассона} \right\} = 1 \quad \left\{ \text{для эрланга} \right\} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j^2}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j}} < 1$$

Все $a_j > 0$
сумма квадратов vs
квадрат суммы
максимум достигается:

(чем меньше вариация, тем больше нужен порог)

При $\forall$ фиксир. мат. ож. и при $\forall$ D мы всегда можем
выбрать N и $a_1, \dots, a_N$, чтобы получить
нужный коэффициент вариации $m \in (0, 1)$

Гипер-экспоненциальный поток

Интерпретация:

Порядок гипер-экл. потока - число N

Допустим мы имеем разн. распр. $a_1, \dots, a_N$
и случ. велич. такие:

- 1) случайно выбирается $a_i \in \{a_1, \dots, a_N\}$ с вер. c_i ,
- 2) ждем выбран. a_i
- 3) так N раз
- 4) сложение в $\{Z_k\}$

т.е. в начале интервала мы выбираем
послед-е $a_1, \dots, a_N$ - "вероятностная"

$$P(Z_k) = \sum_{i=1}^N c_i (1 - e^{-a_i t}) \quad \left(0 < c_i < 1, \sum_{i=1}^N c_i = 1 \right) \quad \text{"смесь"}$$

Мат. ожидания

$$E(Z_k) = \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{a_j}$$

$$D(Z_k) = 2 \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{a_j^2} - \left(\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{a_j} \right)^2$$

Коэффициент вариации:

$$m = \sqrt{1 + 2 \frac{\sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_j^2} \right)^2}{(E Z_k)^2}} > 1$$

На практике всегда можно выбрать
параметры для получения E, D, m

Задачи

Задача 1:

Найти гипер-экспоненциальный поток 2-го порядка
в котором а) $E Z_k = 1, D Z_k = 4$

$$б) E Z_k = 1, D Z_k = 16$$

Задача 2

Найти эрланговский поток, в котором

$$а) E Z_k = 1, D Z_k = \frac{1}{9} \quad (N=2 \text{ не получается}) \quad (N=9)$$

$$б) E Z_k = 1, D Z_k = \frac{2}{3} \quad (N=2) \quad 7$$

Задача 1:

При фиксированном N в эрланг. потоке, в каких диапазонах можно выбирать вариацию m

Задача 3:

Пусть известны $\{z_k\}$ и ищем "распределение Веббуа"

$$P(z_k < t) = 1 - e^{-x^\beta}, \beta > 0$$

$$P(z_k < t) = 1 - e^{-t^\beta}$$

это распределение из m независимости.

а) найти коэфф. вариации m

(отсюда ясно, в каком классе искать аппроксимацию)

б) выбрать распределение (эрланг, чх гиперэксп.)

Квазипотоки

Можно рассм. потоки, когда в один момент - ~~неск.~~ неск. заявок, и тогда можно ввести обобщение на рассмотренного потоков модели. Временн

$V(t)$ $[0, t]$ кол-во событий случивш. в интервале $[0, t]$

Свёртка 2-х случ. величинс распредел. A и B :

$$A * B(t) = \int_0^t A(t-n) d B(n) \quad \text{для непер. сл. в.}$$

$$P(V(t) = k) = A^{*k}(t) - A^{*(k+1)}(t)$$

это свёртка вер-то то, что k -я заявка поступит k раз до момента t

$$A(t) = 1 - e^{-at} \Rightarrow A^{*k} = 1 - e^{-at} \left(1 + at + \dots + \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(V(t) = k) = e^{-at} \frac{(at)^k}{k!}$$

распределение Пуассона с парам. 'at'

Аналогично для 2-х, 3-х, ... - мерных случаев, но там формулы сложны.

Для эрланга и гиперэкспоненц. можно вывести, но получено то, что формулы сложные, там они ещё будут и "не удобны" (позже мы выведем другие формулы)

На практике в передаче данных нас интересует: 1) размер отрезка

2) год, обслуживаемые / не обслуж.

Всё это - случайные величины.

Марковские процессы - максимально удобны в использовании для анализа

случайная величина состоящая системы в момент времени t

$X_t, t \in T$ - есть случайный процесс (семейство сл. вел.)

(X, B) время (полупрямая обычно)

фазовые пр-ва.

значения X_t борелевская сигма-алгебра

$\mathcal{F}_t$ введём.

$$\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(\xi_s, s \leq t)$$

сигма-алгебра (полноты, м-ва событий)

$$\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma(\xi_s, s \geq t)$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s) \leftarrow \text{сигма-алгебра, порождённая сл. вел. } \xi_s$$

случайный процесс назыв. Марковским, если $\forall$ события $A \in \mathcal{F}_{s,t}$

$$B \in \mathcal{F}_{\geq t}$$

$$P(AB | \mathcal{F}_{s,t}) = P(A | \mathcal{F}_{s,t}) \cdot P(B | \mathcal{F}_{\geq t})$$

(определение надо кончить)
 при заданном настоящем, будущее и прошлое - независимы)

Альтернативное определение Марковск. процесса:

$\{X_t\}$ - Марковский процесс, если $\forall \Gamma \in \mathcal{B}$

$$P(\{X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{ss}\}) = P(\{X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}_{ss}\})$$

распределение всех процессов в прошлом...

Процесс с дискретным временем и счётным числом состояний/значений

$$T = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ - почти с.в., причём не более, чем счётное число значений

Если мы рассматр. почти моменты времени $t_1, \dots, t_n, \dots$ то $0, 1, 2, 3, \dots$ - это просто порядок (физически велич. нас не интерес.)

Состояния / значения - можно переименовать, как и $t_1, \dots, t_n, \dots$, а сами велич. нас не интерес.

Определение цепи Маркова $\{X_n\}$

Если $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$

$\forall$ набора $i_0, \dots, i_n$ - являющихся значениями $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n) \Leftrightarrow$$

это эквивалентное определение. (типично доказуемо)
 $\Leftrightarrow P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$

$P(X_0 = i) = P_i^{(0)}$ - "начальное распределение цепи Маркова"

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}^{n, n+1}$ - "вер-ть перехода за один шаг"

если $P_{ij}^{n, n+1} = P_{ij}$ - "однородная цепь Маркова"

по сути это значит, что все зависит от момента времени вер-ти перехода из сост. i в j остаются теми же, (хотя вер-ть перех из i в j_1 и i в j_2 - могут быть разными)

На практике ~~мы~~ изучают почти всегда лишь однородные цепи Маркова (не однород. изучать не умеют.)

Итоговое определение:

Цепь Маркова однозначно определяется начальным распределением и матрицей перехода за 1 шаг.

□ Или надо найти $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) =$

= (по утверждению для формулы условн. вер-ти) =

$$= P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \text{по Марковскому св-ву}$$

$$= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot \dots$$

$$\dots = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot \dots =$$

$$= P_{i_0 i_1}^{(0)} \cdot P_{i_1 i_2}^{(1)} \cdot P_{i_2 i_3}^{(2)} \cdot \dots \cdot P_{i_{n-1} i_n}^{(n-1)}$$

Обозн:

вер-ть перехода за n -шагов $P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i)$ кол-во шагов.

Теорема (уравнение Колмогорова - Чепмена)

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq \text{состояние}} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(s)}, \quad n > 0, s > 0, n+s = n.$$

похожие на ~~умножение~~ умножение матриц.
(только матрицы могут быть бесконечн.)

$$P = (P_{ij}) \quad P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$$

$$P^{(n)} = P^{(n)} \cdot P^{(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$P^{(n)} = P^n$$

$$P(X_n = j) = \sum_i P_i^{(0)} P_{ij}^{(n)}$$

Цель Маркова для времени уходящ. в ∞

Мы интересуемся

Поведением вер-тей перехода при $t \gg 0$

Стационарное распределение:

формально - решение СЛАУ

не формально - если в виде стат. распр. задать начальн. распредел. цепи Маркова, то

при перех. в след. сост. распредел. остан. стат.

В бесконечности распределение цепи Маркова стремится к стационарному распределен.

Опр. Классификация состояний:

1 есть сост. i и j

" j достигнуто из i " если $\exists n \geq 0: P_{ij}^{(n)} > 0$

при этом по определ. $P_{ii}^{(0)} = 1, P_{ij}^{(0)} = 0$

"несущественное сост. i ", если $\exists$ сост. j :

~~j достигнуто из i~~ , но i не достигнуто из j ,

(т.е. $\exists n: P_{ij}^{(n)} > 0$
 $\forall m: P_{ji}^{(m)} = 0$)

"потомствоющее состояние", если $P_{ii} = 1$

"связывающиеся состояния i, j " обозн: $i \leftrightarrow j$,
если они достигимы др. из друга по определению $i \leftrightarrow i$ за 0 шагов.

$i \leftrightarrow j$ - отношение эквивалентности:

1) симметричность: $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$

2) транзитивн: $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

3) рефлексивность: $i \leftrightarrow i$ - по определению т.к. достигнуто за 0 шагов.



Мно-во состояний можно разбить на классы эквивалентности.

Опр. Незаключаемая цепь:

если все состояния цепи образуют один единственный класс эквивалентн.

Разрешимую цепь - можно исследовать независимо по классам эквивал.

Период состояния i :

наибольший общий делитель $n \geq 1: P_{ii}^{(n)} > 0$

(т.е. все интерв. времени, в кот можно вернуться)

В цепи Маркова могут быть состояния, к которым невозможно вернуться

Если сост. существенно, то

$$\exists n \quad P_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow P_{ii}^{(nm)} > 0$$

$$\exists m \quad P_{ii}^{(m)} > 0$$

$$\text{т.к. } P_{ii}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{ki}^{(m)}$$

Если n -ход сост. 1 - означ., что верн. в сост. i можно вернуться за кол-во шагов, кратн. n .

Мы будем рассч. периодичн. системы, однако это очень жесткое требование

формально найти n -сложно

Не периодическое состояние имеет $n=1$

Затверждение:

В неразложимой цепи все состояния имеют одинаковый период. $\Rightarrow$

Пример: Следствие: $\Rightarrow$ периодичность - свойство класса

Если хотя бы в одном шаге можно зайти $\Rightarrow$ ~~есть~~ $\exists$ 2 цепи с ~~одинаковой~~ путч. в i и $i+1 \Rightarrow n=1$, $\Rightarrow$ цепь не периодична.

в общем случае установить периодичн. - сложно

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i)$$

вер-ть возвращения за n шагов

возвратное состояние i , если

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{ii}^{(n)} = 1 \quad (\text{т.е. уверяя, что цепь вернется в сост. } i \text{ за конечн. число шагов})$$

Затверждение: св-во возвратности - применимо ко всему классу

Теорема (о Маркове)

$\{X_n\}$ - неразложимая, неперерывная, возвратн.

цепь Маркова, тогда

$$\forall i, j \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\sum_k \pi_k}$$

(распределение вер-тей после большого кол-ва шагов) (не зависит от i !)

либо 1) $\pi_j = 0 \quad \forall j$ - "слабая эргодичная цепь Маркова"

либо 2) $\pi_j > 0, \sum_j \pi_j = 1$ - "сильная эргодичность" или "эргодичность"

π_j представляют из себя нек. распределение $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ - если начальное распределение Маркова = финальному распределению, то = распределению на каждом шаге.

"стационарное распределение"

стационарное распр. - не зависит от эргодичности.

Примеры

1) $\{X_n\}$ - независ. сл. велич. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это цепь Маркова.

$$\exists P(x_i = j) = a_j, j \in \{0, 1, \dots, N\},$$

тогда $P_{ij} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ - матрица вер-нот перехода

2) Построим послед-ть частичных сумм.

$$Y_n = X_0 + \dots + X_n$$

$\{Y_n\}$ - зависимые сл. величины.

$$\text{тогда: } P_{ij} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = P(Y_n = j | Y_{n-1} = i)$$

нуль, т.к. $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$, но $\{Y_n\} > 0$

Такая цепь Маркова состоит из несущественных состояний (означая переход в левую, в него уже не вернутся)

3) Пример очень широкого класса.
(данный пример уже немного похож на реальный)

$\{X_n\}$: $X_{n+1} = F(X_n, Z_{n+1})$ - рекуррентная посл-ть

т.е. $\{Z_n\}$ - посл-ть с.в. величин ~~или~~ или с.в. векторов, независимы и не зависят от X_0

F - измеримая функция.

тогда $\{X_n\}$ - одномерная цепь Маркова

Допустим X_n - ~~не~~ принимает целочисл. значения

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(F(i, Z_{n+1}) = j)$$

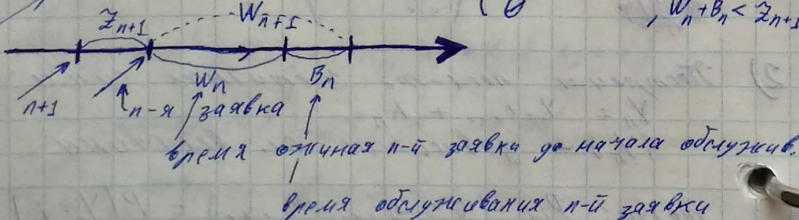
↑
это типичн. задача по нахождению распредел. вер-ти для нек. функ. F и с.в. вел. Z_{n+1}
далее - это уже числен. задача для наших конкрет. примеров.

Пример 3.1) Есть 1 поток и 1 буффер.

рассм. с.в. посл-ть - время обслуживания n -го абонента

предположим, что у нас FIFO (зачисл. порядок поступления)

$$W_{n+1} = \begin{cases} W_n + V_n - Z_{n+1}, & W_n + V_n \geq Z_{n+1} \\ 0, & W_n + V_n < Z_{n+1} \end{cases}$$



Мы выводим W_{n+1} через $W_n \Rightarrow W_{n+1} = \max(W_n + V_n - Z_{n+1}, 0)$

$\{W_n\}$ - рекуррентный, если $\{Z_n\}, \{V_n\}$ - незав. с.в. вел. (т.е. это $\{Z_n\} = \{V_n\}$ - с.в. вектор.)

3 основных способа добиться Марковск. процесса

1) состав. необход. предположения (напр. о незав. с.в. вел.) (или, что распределение - показательное (оно не зависит от прошлого) но не всегда эти предполож. - стр-вы.

2) Будем рассм. процесс не в t моменты времени, а в специально подобранные.
а) инф. о процессе должна по макс. сохран.
б) послед. мом. вел. - это последов.
"метод вложенных цепей Маркова"

3) "метод дополнит. компонент"
(более менее универсален)

1 процесс - не Марковский (т.е. из текущ. состоян. не ясно будущее) - нам просто не хватает данных.

Потому данные нужно дополнить (доискать)
(напр. учтив. в данной позиции всего предыстории) это плох. идея, т.к. фразов. пр-во слишком сложное

пример для нек. процесса

Рассм. 1 поток, 1 буффер.

ко-во заявок в мом. времени t
 $L(t) = \begin{cases} 0, & \text{если заявок в буфере нету.} \\ > 0, & \text{если есть заявки в очереди + обслуж.} \end{cases}$
не дискр.

мы не можем опред. $L(t+\tau)$, т.к. не знаем, когда придет заявка

мы также не знаем, когда законит текущее обслуживание
предположим что поступл. заявок по Пуассон. распредел.

пусть обслуживание
идет по показат.
распределению

Также рассм. $L(t), X(t), Y(t)$

↑
сколько уже обслуж.
то, которая сейчас в t
обслуживается.

сколько прошло времени с последн. поступл.
заявки

Пример:

$t_1, t_2, \dots, t_n$ - послед. уходы заявок из системы.

Если рассм. при Пуассоновском потоке только в
моменты времени ухода заявок, то мы
получим цепь Маркова. и

$$L_n = L(t_n + 0)$$

$$L_{n+1} = \begin{cases} L_n - 1 + \nu_B, & L_n > 0 \\ \nu_B, & L_n = 0 \end{cases}$$

$$\nu_B = \max(0, L_n - 1) + \nu_B$$

ν_B - кол-во заявок
Пуассоновск. потока,
поступивших за время
обслуж. 1 заявки.

Пример:

Допустим есть цепь Маркова с 5 сост. и матр.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← 2 класса сообщающихся
между собой состояний

цепь Маркова не эргодична,
т.к. зависит от того из
какого сост. вышел.

18 Разложившая цепь

Пример:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

здесь период составный = 2

Допустим цепь Маркова

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 \cdot \frac{1}{2} + \pi_2 \cdot \frac{1}{4} \\ \pi_2 = \pi_1 \cdot \frac{1}{2} + \pi_2 \cdot \frac{3}{4} \\ \pi_3 = \frac{1}{2} \pi_4 \\ \pi_4 = \pi_3 + \pi_5 \\ \pi_5 = \frac{1}{2} \pi_4 \end{cases}$$

из пред-пред-кающего
примера.
разложив, тогда напишем:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

Решение:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{6} \\ \pi_2 &= \frac{1}{3} \\ \pi_3 &= \frac{1}{8} \\ \pi_4 &= \frac{1}{4} \\ \pi_5 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Система уравнений стационарн. распределения

Пример:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- периодич. с периодом 2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- за чет. число шагов, ч не эргодична

стационарн. распред. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$

Задача:

Классифицир. след матрицы:

1. разложим / не разложим - сколько классов.
2. периодичность

$$1) P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

иногда бывает нужно переставлять
состояния.

$$2) P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Критерий Ростера

Неразложимая, неперерывная цепь Маркова
эргодична $\Leftrightarrow$

(мн-во сост. чисел
мн-во чисел, ≥ 0
чисел)

$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ - имеет нехив.
решения, пока, что

$$\sum_i |\pi_i| < \infty$$

на самом деле это лишь достат. услов.
Критерий Мушары (часто используется)

Неразложимая, неперерывная цепь Маркова -
эргодична, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists i_0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 :$$

$$\sum_j P_{ij} x_j \leq x_i - \varepsilon, \quad \forall i \geq i_0$$

$$\sum_j P_{ij} x_j < \infty, \quad i < i_0$$

Обозн.: Символика Жемдеа

четверка $A|B|n|m$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$

1) какой входящий поток данной сист. обслуж.

G - $\forall$ поток

GI - рекуррентный поток

(интервалы поступления независимы
и одинак. распределены)

M - пуассоновский поток

(обладает Марковск. св-вом)

MM - гипер-экспон. поток

E_k - эрланг. поток порядка k

2) M - показательное распредел. времени обслуж.

MM - гипер-экспон.

3) n - кол-во приборов

4) m - размер буфера

Пример:

M/GI/1/∞ ← Гек. дурфел.

1-но усл-во

входящ. поток - пуассон.

распредел. по времени - независ. и одинак. распр.

M/GI/1/∞ vs GI/M/1/1/∞

в реальности это часто встречаются.
(большинство потоков - пуассоновск.)
такое не часто возникает.

L(t)

λ - интенсив. потока

λ V(t) - функц. распредел. времени обслуж.

кол-во заявок в системе в мом. времени t

Для M/GI введем t₁, t₂, ..., t_n, ... - моменты
обслуживания заявок

Все заявки - идентичны ⇒ дисциплина очереди
для изучения L(t) - не важна

$$L_n = L(t_n + 0)$$

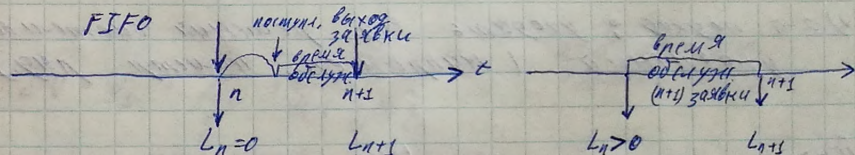
(Найдем вер-ть перехода за 1 шаг)

Возьмем интервал. времени T (фиксир. T)

$$P(V(T) = k) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!}$$

Плотность T - сл. вел. с функ. распр. G(x) ⇒

$$\Rightarrow P(\text{за вр. инт. } T, k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dG(x)$$



Если L_n = 0 ⇒ L_{n+1} = число заявок, поступивш.

за время обслуж. (n+1) заявки.

Если L_n > 0 ⇒ L_{n+1} = L_n - 1 + I_{n+1}

21

$i = 1, \dots, n, c_j \leq y_j \leq d_j, j = 1, \dots, m$.
 12. Найти седловую точку функции $K(x, y) = 8(4xy^2 - 2x^2 - y)$, определенной на множествах $X = Y = [0, 1]$.

$$P_{0j} = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^j}{j!} dB(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$i \geq 1 \quad P_{ij} = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x), \quad i = 1, 2, \dots, j = i-1, i, i+1, \dots$$

периодично и
 цель - неразложима, т.к. из $\forall$ сост. можно перейти
 в сост. $j > i$ при прав. заявке - встала машина
 в сост. $j < i$ можно за $i-j$ шагов 3^e и шаг.

$$\beta_i = \int_0^\infty x^i dB(x) \Rightarrow \text{условие эргодичности: } \alpha \beta_1 < 1 \Leftrightarrow \rho_1 < \frac{1}{\alpha}$$

нестационарн. сист. уравнений.

$$\dot{\pi}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i P_{ij} + \pi_0 P_{0j}, \quad \forall j = 0, 1, \dots$$

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) + \pi_0 \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^j}{j!} dB(x)$$

В этой сист. уравн.

кол-во переменных - ∞ , т.к. кол-во π_j - ∞ ,

кол-во уравнен. - ∞ , т.к. заявки могут прийти в $\forall$ момент

Как решать систему?

1) Если коэфф. достаточно хороши, то!

можно использовать "метод производящих функц." (основан на свед. задачи к нахождению степенного ряда)

(в данном случае - это получится)

2) 2-й подход: угадать вид решения системы уравнений (например, теорет. ряд)

Пойдем 1-м путем:

$$\sum_{j=0}^\infty z^j \dot{\pi}_j = \sum_{j=0}^\infty z^j \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) + \sum_{j=0}^\infty z^j \pi_0 \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^j}{j!} dB(x)$$

интегральное преобразование Лапласа - сложится
 пропустили много технических
 выкладок

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$$

$$\hat{\pi}(z) = \frac{(z-1) \beta(\alpha - \alpha z) \pi_0}{z - \beta(\alpha - \alpha z)}$$

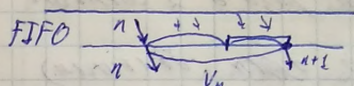
$$\hat{\pi}(1) = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 - \alpha \beta_1$$

Из преобраз. Лапласа моменты находятся
 посредством неопределен дифференц

$\hat{\pi}$ - вычисл. в 1 - взяли предел
 в ∞ - Лемма + предел.

Здесь становится важна дисциплина ~~входа~~
 обработки заявок.

(т.к. после ухода n -й заявки - оставшиеся заявки могут быть разными в завис. от дисциплины)



В мом. $n+1$ будут заявки в буф.
 лишь те, котор. помнят.
 между n и $n+1$

$$P(L_n = k) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{(ax)^k}{k!} dV_n(x)$$

при $n \rightarrow \infty$ (стационарный случай)

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x) \quad \hat{\pi}(z) = \psi(\alpha - \alpha z)$$

$$\psi(s) = \frac{s \beta(s) (1 - \alpha \beta_1)}{s - \alpha + \alpha \beta(s)}$$

$$EV = \psi_1' = \beta_1 + \frac{\alpha \beta_2}{2(1 - \alpha \beta_1)}$$

мат. ожид.
 времен. обслуж.

2-й момент.
 времени обслуж.

интенсивн. Лудсон. полка

Если величина загрузки $\lambda = 1$, то очередь будет неограниченно расти и средняя длина - β_1

Дане если β_2 - бескон., то распределение S при 1 будет конечн.,

т.е. с достат. больш. вер-ми, можно дать больш. очередь.

Если время обслуж. распредел. по показат. закону, то $B(x) = e^{-bx}$

из U_3 (с.ч. формулу выше) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{b-a}$ - среднее время задержки эрланга.

а если взять $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{b-a} = \frac{a}{b} \frac{1}{2(b-a)}$ - средн. время загрузки меньше, т.е. при посл. загрузке в среднеч. загр. будет быть раза в 2 меньше

213 - расщ. аналог.
 для тилер-экспоненс.

(там получ., что среднее знач. будет больше)

допустим разрез. поток между n устр-ми (или напр. протект. через) n устр-в. вместо 1

Система из n устр-в. будет чисте показ. распределения в n раз больш., числ. a и b (из выше $\frac{1}{b-a}$) - будут $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ и

отсюда получим $\frac{n}{b-a}$, т.е. среднее значение увелич. в n раз.

но отсюда не следует, что всё станет в n раз хуже, т.к., например,

разделили канал на n подканалов и пустили разн. данное сообщение -

в каждом. оно будет дольше в n раз больше времени, но готов. передача - это минимум из всех времён, и т.к. $E(\min) \neq \min(E)$ - то не ясно, как будет.

и вот в случае показат. распредел.: $E(\min) = \frac{\min E}{n}$, поэтому получаем, что от разбиения на n подканалов - хуже не будет

(хотя в книгах всегда пишут, что - будет)

Пусть дан. Пуассон. поток I ро. разделили на n чл.

Вопрос: как делить?

1 вар.) I заявку в i -й канал тогда в каждом канале будет поток эрланга, а там $\frac{1}{b-a} \Rightarrow$ **406**

2 вар.) отправить заявку на тот прибор, который освободился.

пут сист. обслуж. - многоканальн. тут тоже **406**

3 вар.) I заявки - случайно разбрасываются $\Rightarrow$ это единств. вариант, т.е. Пуассон. поток разобьётся именно на Пуассон. подпотоки с расщ. в n раз меньшим. и хуже тут будет worse

А если разделили не поток, а время?

I делаем 2 дур. и пропускаем по очереди. или I выдел. интервалы времени, когда

в интервал пропуск. нужен поток
тут формулы в разн. жанре, и
дисциплина обслуживания - сложнее

до сих пор мы рассм. потоки из беск. источника
существует теория с конечным числом источников
с 1 заявкой, новая заявка может быть
→ стеноуровень только после оконч. р. обраб.

в таких моделях нет проблем с эргодичн.
т.к. всё - конечно

$$6I/M|1| \sim$$

занумеровали заявки $t_1, t_2, \dots, t_n$ - моменты поступления
в систему

$L_n = L(t_n - 0)$ - односторонняя цепь Маркова.

$$\begin{cases} P_{00} = \int_0^\infty (1 - e^{-bx}) dA(x) \\ P_{ij} = \int_0^\infty e^{-bx} \frac{(bx)^{i+j-1}}{(i+j-1)!} dA(x) \end{cases}$$

$i=0, 1, 2, \dots$
 $j \leq i+1$

← означ. что за время x
1 заявка поступит и
сразу пойдет на обслуж.

означает:
т.е. надо учесть за время x
обслуж. $(i+1-j)$ заявок

это матрица вер-ти
перехода

видно, что
цепь не разложима и не периодичность.

можно применить наши условия эргодич-
ности.

Если $L_1 = \int_0^\infty x dA(x)$ - интервал между поступл.

$L_1 > \frac{1}{b} \Rightarrow$ наша цепь эргодична

эргодичн. т.к.

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^\infty \pi_i P_{ij}, j=1, 2, \dots \\ \sum \pi_j = 1 \\ \pi_0 = \sum_{i=0}^\infty \pi_i P_{i0} \end{cases}$$

следует из $j \leq i+1$
это решение для сист.
уравн. из матрицы вер-ти
переходов.

Из сч. эргод. цепи Маркова $\Rightarrow$, что решение
единственно. $\Rightarrow$ угадаем его
будем искать его в виде степени:

$\pi_j = c r^j$, 'c' - константу писать пока
не будем, пока не найдем
его из условия нормировки.

$$c r^j = \sum_{i=j-1}^\infty c r^i \int_0^\infty \frac{(bx)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dA(x)$$

$$r = \sum_{i=j-1}^\infty \int_0^\infty \frac{(bx)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dA(x)$$

- данный ряд
суммируется.

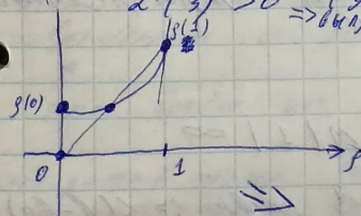
$$\Rightarrow r = \int_0^\infty e^{-(b-b_r)x} dA(x)$$

$$\text{Если } L(1) = \int_0^\infty e^{-bx} dA(x) \Rightarrow r = L(b-b_r)$$

стоит вопрос: есть ли решен. в интервале
 $[a, 1]$

Преобразование Лапласа - Стильтеса для
случайной величины > 0
для него известно

$$\begin{aligned} L(0) &= 1 \\ L''(z) &> 0 \Rightarrow \text{выпукл.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} g' &= -b L'(b-b_r) \\ -b L'(0) &= b L \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b} < L_1 \Rightarrow L_1 b > 1$$

угол $\ll$ т. $g(0)$

$\Rightarrow$ наша функ. имеет решение, причём единственное
т.е. есть нек. решение для ρ , из
линейн. сист. ур.

Условие нормировки:

$$\pi_j = c \rho^j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow c = (1 - \rho)$$

Как найти время задержки:

$$\pi_j = (1 - \rho) \rho^j - \text{геометрич. распределен}$$

$\Rightarrow$ время задержки = время обслуж. $j+1$ заявок.
 $\uparrow$
это случайная величина, ^(с т.з. н. напр.)
находимся легко

функция распределения:

V - величина времени задержки.

$$P(V < x) = 1 - e^{-\rho(1-\rho)x}$$

$$EV = \frac{1}{\rho(1-\rho)} \quad \text{— это } GI/M/1/\infty$$

$$M | GI | 1 | \infty \Rightarrow EV = a\beta_1 + \frac{a\beta_2}{2(1-a\beta_1)}$$

$$M | M | 1 | \infty \Rightarrow EV = \frac{1}{\rho - a} = \frac{1}{\rho(1-\frac{a}{\rho})}$$

Пример.

Рассмотрим модель с циклич. перераспределением
пакетов между потоками.
(получ. эрлангов. распредел.)

$$\uparrow \text{ эрланг. 2-го порядка: } E_2 | M | 1 | \infty$$

28 Попробуем решить эту нето $\rightarrow$ уравн. $\rho = \lambda(b - \rho b)$

$$\lambda(s) = \left(\frac{2a}{s + 2a} \right)^2$$

$$\rho = \left(\frac{2a}{b - \rho b + 2a} \right)^2$$

— это даст нам кубическое
уравн. $\rho = \lambda(b - \rho b)$

и п.к. 1 корень мы знаем
(угадали, $\rho = 1$), то
остальное можно получить

$$\rho = \frac{8a^2}{b^2 + 4a + \sqrt{b^2 + 8ab}}$$

$\Leftarrow$ решив квадр. уравн.

значит $< 8a^2 \Rightarrow \rho < 1$

1 среднее время обслуж. $\theta = 1$

1 интенсивность $a = \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{4}$$

$$\text{Тогда для нашей сист. } EV = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

А вот если бы входил поток бн. потоком

Пуассона, $M | M | 1 | \infty$

$$\text{то получили бы } EV = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5} > \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ среднее время задержки в
эрланг. потоке — уменьшилось
по сравн. с Пуассон.

$$\lambda(s) = e^{-\frac{s}{a}}$$

Тока что мы рассм. ~~Марк.~~ Марк. модель с дискретн.
временем и дискр. значениями. (или с ^{ин-во} состоян.)

$\uparrow$

это удобно для аналитич. решения, ~~и~~ и его ^{использ}

но зато в непрер. системах пот. бн быть различн.
и интегралн. аппарат.

Теория цепей Маркова с

непрерывным временем.

Время - полулучная $[0, +\infty)$

Опр. Марковский процесс $X(t)$

Мы будем отождествлять значения с номерами этих значений.

$X(t), t \in (0, +\infty)$ - Марковский процесс, если.

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$P(X(t_n) = i_n | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) = P(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

! предполагается, что величина не зависит от s , т.е. не завис. от положения интервала.

Потребуем Свойства: Опр. Стандартная матрица перехода:

$$1) P_{ij}(t) \geq 0$$

← следует из св-ва вероят. и определения $X(t)$

$$2) \sum_j P_{ij}(t) = 1 \quad \forall i, t \geq 0$$

$$3) P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$4) \lim_{t \rightarrow 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

и $P_{ij}(t)$ - непрерывна.

- для возможности предельного перехода в функции.

Следствие:

Теорема: Для стандартной матрицы перехода $\forall i, j, P_{ij}(t)$ - дифференциал, причём.

$$-P'_{ii}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = q_i$$

$$P'_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}, \quad i \neq j \quad - \text{ветвля конст.}$$

30

$$0 \leq q_i \leq +\infty$$

$$0 \leq q_{ij} \leq +\infty$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$$

Опр. Консервативная цепь Маркова.

если достигается равенство $\forall i$

Если $q_i \rightarrow +\infty$, то это "мгновенное состояние" (это сост., в котором цепь находится в нек-во времени) - это поглощение.

! Мы будем рассуждать консервативные с конечными q_i

Инфинити-значенные параметры для цепей Маркова с непрер. временем - (это рога замрзнут переход из сост. в сост. для параметров (их отношения) имеют некоторый вер-ный смысл.

Повторение:

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

$$1) P_{ij}(t) \geq 0$$

$$2) \sum_j P_{ij}(t) = 1$$

$$3) \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t) = P_{ij}(t+s)$$

$$4) P_{ij}(t) - \text{непрер.}, t \geq 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = -P'_{ii}(0) = q_i$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij} = P'_{ij}(0)$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$$

$$0 \leq q_i \leq +\infty$$

$$0 \leq q_{ij} \leq +\infty$$

инфинити-значенные

параметры

Для консервативной цепи (где достигт. =)

q_i - число, случайно появивш. в сост. i , когда в этом состоянии она будет нек. время с вер-то распределен. с парам. q_i

После времени q_i состоян. обязат. изменит.

на j с вер-то q_{ij}

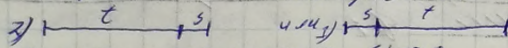
Смысл. инфинити-значен. q_i параметров q

31

Если $q_i = \infty$ - то это свойство быть поглощающим и означ, что понов. в i , в замк. сост. и остальн.
 $q_i = \infty \Rightarrow i$ - мгновенное состояние

Леммы Колмогорова - Чепмена

Интервал $t+s$ можно разбить 2-мя спос.



а далее устремим $s \rightarrow 0$

и выразимся через инфинити-зема-лем. парам.

Итак: $P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t)$

$P_{ij}(t+s) - P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t) - P_{ij}(t)$

$\frac{P_{ij}(t+s) - P_{ij}(t)}{s} = \frac{(P_{ii}(s) - 1) P_{ij}(t)}{s} + \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(s)}{s} P_{kj}(t)$

$P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t)$

нач. усл: $P_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Система "обратных" уравн. Колмогорова"

т.к. сист. показ, как можно перейти в некую сост. из различных предв. сост.

$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s)$

$\frac{P_{ij}(t+s) - P_{ij}(t)}{s} = \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(t) P_{kj}(s) - P_{ij}(t) P_{ij}(s)}{s}$

$P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t)$

нач. усл: $P_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Система "прямых" уравн. Колмогорова"

т.к. по нач. сост. считалась, куда за время t можно было перейти.

Мы будем использовать прям. уравн. Колмогорова, т.к. обратн. мы задаем их. сост. и смотрим, что получится

Опр. Матрица инфинити-зема-лем. парам.

$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = q_{ij}, \quad i \neq j$
 $a_{ii} = -q_i$

Запись прямых и обратных уравн. через матри

$P'(t) = AP(t)$ - обратн., где $P'(t) = (P'_{ij}(t))$

$P'(t) = P(t) \cdot A$ - прям

~~Понятие разложимости для марк. перек. чел. Марк.~~
 Понятие разложимости для марк. перек. чел. Марк.
 Аналогично разложим. для дискр. времени.
 (через класс эквивал.)

Понятие непродуцим и не пер. - такое ввести для непрод. времени - не имеет

Опр. Св-во сжимаемости

$\exists P_{ij}(t), t \in T, \text{ где } T = [0, \infty) \text{ или } T = 0, 1, 2, \dots$

↑
 Цепь - сжимающаяся, если
 $\forall n, m \exists k, \exists t: P_{nk}(t) > 0$
 $P_{mk}(t) > 0$

Теорема (Фостера)

Консервативная цепь Маркова с непр. временем и счетным левым состоян. и инфинити-зема-лем. матрица A
 - эргодична, если
 она неразложима, и сист. уравн.
 $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ji}}{-a_{ii}} x_j$
 имеет неприв. решение, причём $\sum |x_i| < +\infty$
 при этом.

если это выполняется то прямая $P_{ij} - \exists$ и она является единствен. стационарн. распределен.

Творчество (критерий Мустафы)

[illegible]

$$\sum_i P_{ij}(s) x_i \leq x_j - \varepsilon, \quad j \in E \setminus E_0$$

$$\sum p_{ij}(s) x_j < \infty, \quad i \in E_0$$

↑
д.с. сумма должна быть конечно, ~~и~~ и лишь
в конечн. мн-ве может быть бескон.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j, \quad \sum \pi_j = 1$$

← Это статья, распр. и ~~еще~~ это можно найти.
через прач. уровн. Колмог.

$\uparrow$ произв. $\uparrow$ $\rightarrow \text{const} \Rightarrow$ произв. $\rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k+j} q_{kj} \pi_k - q_j \pi_j = 0$$

Опр. Законные Равновесия

Процесса тибелч и рождения (пример)

Инфинит. - зем. парам:

$$\frac{P_0}{P_{01}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1$$

$$g_k = \lambda_k + \mu_k \quad \frac{g_{k,k+1}}{g_k} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} ; \quad \frac{g_{k,k-1}}{g_k} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

Прям. уравн. Котлов:

$$P_{i0}'(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i+1}(t) \quad - 3 \times \text{guar. deck.}$$

$$P'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_j) P_{ij}(t) + \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t)$$

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

34

Уравнения равновесия

$$-\lambda_0 \hat{\pi}_0 + \mu_1 \hat{\pi}_1 = 0$$

$$\lambda_{k-1} \hat{\pi}_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) \hat{\pi}_k + \mu_{k+1} \hat{\pi}_{k+1} = 0$$

$$x_k = \mu_k \hat{\pi}_k - \lambda_{k-1} \hat{\pi}_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n \Rightarrow x_n = 0$$

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \pi_{k-1}, \quad \rho_k = \prod_{j=1}^k \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

$$\Rightarrow \hat{T}_K = f_K \hat{T}_0, \quad \sum f_K < +\infty$$

Если сумма g_k - сходится, то наша цепь - сложно-элементарная

Заросе маки повезло, т.к. мажя 3-х днат. помр. Блато-
даря паробран. рекурсия 1х10мму-1066

Метод дополнения до Марковск. процесса
непрерывной компонентой

Рассм. $M/GI/1/\infty$

↑ пуассон. поток с инт. α
единиц распр. с функц. $B(x)$

Если вместо 1, взять 2 (ка-во уз-лов образ), то получится очень громоздкая математичка, с которой до сих пор справляются с трудом.

$\lambda(t)$ - общее число заявок в системе.
 ↑ (время - непрер.)

уже обуславливает, что этот процесс
не является марковским. $L(H) = K \geq 1$
(т.к. предвыборная логика: 15)

Дискретный путь, мы уже рассматр. ранее. 35
 Пойдем путем расширения пр-ва:
 $(L(t), x(t))$, где $x(t) \leq$ или время (последн. посет.)
или время до след. посет.

35

Если взять, "до" или "после" поступил - то в уравнении Холмстедта появится лишняя производная
 "от" или "после" поступил - "после" - появ. лишн. интеграл.

Возьмем $x(t)$ - время, прошедшее с начала обслуживания. посл. заявки до момента t

Теперь мы можем описать $L(t)$

Предположим, что $B(x)$ - абсолютно непр., $\Rightarrow$
 $\Rightarrow B(x)$ - плотность распр.

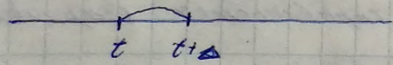
$$P(n, x, t) = \frac{\partial}{\partial x} P(L(t) = n, x(t) < x) \quad (\leftarrow \text{это плотн. по } x)$$

$$P_0(t) = P(B(t) = 0)$$

$$P_0(0) = 1$$

Обозн.: $\eta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$

Смысл η : Если $\eta(x) \cdot \Delta x = \frac{b(x) \cdot \Delta x}{1-B(x)} \stackrel{\bar{b}(\Delta)}{=} \text{будет равно}$
 $= P(\text{время обл. } \in (x, x+\Delta x) \mid \text{вр. обл. } \geq x)$
 С "условная плотность до облужив. времени, при усл. что заявка еще не обслужена."
 или "интенсивность отказов"



Для $x \geq 0$

$$P(n, x+\Delta, t+\Delta) \cdot \Delta + \bar{b}(\Delta) =$$

Для того, чтобы в момент времени $t+\Delta$, и по заявке котор. обслуж., уже обслуживается время x

$$= P(n, x, t) (1 - \delta_{n,1}) (1 - \eta(x) \cdot \Delta) +$$

$$+ P(n-1, x, t) (1 - \delta_{n,1}) \Delta + o(\Delta)$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

36) для $n=2, 3, \dots$ заявок $\delta_{n,1}$ - символ Кранкеда

Теперь мат. выкладки: грани на 0, и $t \rightarrow 0$

$$1) \frac{P(n, x+\Delta, t+\Delta) - P(n, x, t)}{\Delta} = \frac{P(n, x+\Delta, t+\Delta) - P(n, x+\Delta, t)}{\Delta} +$$

$$+ \frac{P(n, x+\Delta, t) - P(n, x, t)}{\Delta} = P'_x(n, x, t) + P'_t(n, x, t) =$$

$$= -(a + \eta(x)) P(n, x, t) + (1 - \delta_{n,1}) a P(n-1, x, t)$$

$$2) P_0(t+\Delta) = P_0(1 - a\Delta) + \int_0^\infty P(1, x, t) \eta(x) dx \Delta$$

вер-ть того, что заявка за время Δ она обслужилась (и в мом. t - она обслуживалась)

$$3) \int_0^\infty P(n, x, t+\Delta) dx =$$

вер-ть, что в момент $t+\Delta$ в системе n заявок и за время Δ обслуж. 1 из них прошло времени $< \Delta$

$$= \int_0^\infty P(n+1, x, t) \eta(x) \Delta dx + \delta_{n,1} (a \cdot \Delta \cdot P_0(t) + \bar{b}(\Delta))$$

- 1) когда завершено обслуж. предыд. заявки.
- 2) когда заявка пришла в свободн. систему

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -a P_0(t) + \int_0^\infty P(1, x, t) \eta(x) dx$$

$\leftarrow$ это нрч. уст. дифференц.

$$P(n, 0, t) = \int_0^\infty P(n+1, x, t) \eta(x) dx + \delta_{n,1} P_0(t) a$$

$\leftarrow$ аналогично дифференц.

но $\in \mathbb{N} \Rightarrow$ кол-во уравн. - беск. много
 однако - уравнения в частных произв.
 (что лучше, чем просто дифференц.)

Возьмем нек. приближение для нашего дифференц.

$$\begin{cases} \hat{P}(z, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n, x, t) \\ \frac{\partial \hat{P}(z, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{P}(z, x, t)}{\partial x} = -(a - az + \eta(x)) \hat{P}(z, x, t) \\ \hat{P}(z, 0, t) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \hat{P}(z, x, t) \eta(x) dx - \int_0^{\infty} P(1, x, t) \eta(x) dx + az P_0(t) \\ \text{нормировка:} \\ P(z, 0, t) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \hat{P}(z, x, t) \eta(x) dx - \frac{dP_0(t)}{dt} - (a - az) P_0(t) \end{cases}$$

т.к. $P_0(t)$ не завис. от $z \Rightarrow$ можно подобрать такое z , чтобы вычисл. $P_0(t)$

И хотя мы получили не плохое ~~уравн.~~ уравн. решать его впрямую придется либо через ~~матрицу~~ матрицу в θ , разложив по Тейлору (производн. в 0), т.к. мы найдем не вер-ть, а степен. ряд.

Возьмем интеграл. преобраз. Лапласа по t

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(z, x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \hat{P}(z, x, t) dt \\ \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \hat{P}(z, x, t)}{\partial t} dt &= \\ &= s \hat{\pi}(z, x, s) - \hat{P}(z, x, 0) \\ &\stackrel{=0}{=} \text{для нашего случая.} \end{aligned}$$

$$\hat{\pi}_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_0(t) dt$$

Из производ. функц. тяжело найти вер-ть, но легко найти моменты.

Преобраз. Лапласа очень тяжело обращаться
2 преобраз. Лапласа есть связь между P и $\hat{P}$
при $t \rightarrow \infty$ одной и $t \rightarrow 0$ другой
Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{P}(z, x, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\pi}(z, x, s)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\pi}(z, x, s)}{\partial x} = -(s + a - az + \eta(x)) \hat{\pi}(z, x, s) \\ \hat{\pi}(z, 0, s) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \hat{\pi}(z, x, s) \eta(x) dx - (s + a - az) \hat{\pi}_0(s) \end{cases}$$

уравн. с раздв. переменн.

$$\begin{cases} \hat{\pi}(z, x, s) = (1 - B(x)) e^{-(s+a-az)x} \hat{\pi}(z, 0, s) \\ \hat{\pi}(z, 0, s) \cdot (1 - z^{-1} \beta(s+a-az)) = 1 - (s+a-az) \hat{\pi}_0(s) \end{cases}$$

Чтобы найти $\hat{\pi}(z, 0, s)$ - нужно учесть, что оно от z не зависит.

$$\text{коэффициент: } z = \beta(s+a-az)$$

(можно посчитать через в Рунге, где этого надо выйти в комплексн. плоскости.)

и надо, чтобы $|\beta(s+a-az)| < 1$

в Рунге - это о равенстве кол-ва нулей в комплексн. плоскости, а кол-во нулей функ. "z" - единств. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \hat{\pi}(s)$$

$$\hat{\pi}_0(s) = \frac{1}{s + a - a \hat{\pi}(s)}$$

После этого вопрос решенный диффура уже почти не стоит

Остало легко найти стат. моменты, моменты.

Примеры

$$M/M/1/\infty$$

$$\lambda_i = \lambda, \quad \mu_i = i \mu_0, \quad 1 \leq i \leq n$$

↑
т.е. при прямо-пропорц. кол-ву проц.

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} P_0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad P_{k+n} = \frac{\lambda^{n+k}}{n! \cdot n^k} P_0, \quad k > 0$$

находим из условия
нормировки (сумма всех
вер-тей = 1)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^n}{(n-1)! \cdot (n-\lambda)!}} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Исходя из этого можно найти среднюю длину
очереди

$$E_L = \frac{\lambda P_0}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})^2} + \frac{n P_n}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

P_0 - вер-ть, что чету свободного прибора

Формула Литтла - справедлива в широком случае
(не завис. почти ни от чего)

Формула, которая связывает среднее
кол-во занятых n заявок L и задержек V
 $E_L = \lambda E_V$

Если процесс стационарный, то это среднее
кол-во заявок, поступ. в единицу времени.

$[0, T]$, $V(T)$ - кол-во заявок пог. в $[0, T]$

$$E \frac{V(T)}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \lambda$$

Формула Литтла предст. эргодичности
произвольного процесса и E предела.

Вок-во формула Литтла не сложная,
более - арифметическое.

Пример:

Возьмем $n=2$, λ , $\frac{\lambda}{\mu}$ условие ~~эргодичности~~
эргодичности: $\lambda < \mu$

$$E_V = \frac{2\lambda}{\mu + \lambda} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Для $M/M/1/\infty$
было вычислено
 $E_V = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Увеличение среднего
времени задержки
при разделении канала на 2

Пример:

Источников N и они в нек. время (с
показат. распр., напр.) получают
свое i сообщ., оно обслуж. в сист.
и после обслуж. у источника снова
появл. сообщ. для послышки.

Если $N \rightarrow \infty$, $\frac{\lambda}{N}$ - показ. распр., то в
итоге получили поток с показ. λ
у Пуассоновского потока.

кол-во заявок наход. на источн.
интенсивн. λ источн.
(для наход. заявки в сист.)

$$\lambda_k = (N - k) \cdot \lambda$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 0, \dots, N$$

(из-за конечности, получ. конечн. сумма,
котор. не скрачивается)

$$P_k = \frac{N! \lambda^k}{(N-k)!} P_0, \quad \lambda = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + N\lambda + \dots + \sum_{k=2}^N \frac{N! \lambda^k}{(N-k)!}}$$

Такая система имеет эргодичность
(выполнена огранич., периодичн.)

Статистические распределения имеют стационарность.

В реальных системах стоят локальные
периодичности, которые должны принудить
решение передать / не передать

Если траект., напр. Пуассон. поток и не слушать
эфир., то всё будет плохо, т.к. все
звуч. звуча будут передавать

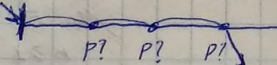
Пример → Зам-во 1, но при 2-х заявк
независ. выбор, передавать ли команду и
мысленно передать.
 $L(t)$ - кол-во сообщений, готовых к передаче.
 λ - интенсивн. сообщений
 μ - интенсивн. обслуживания
 $1 - e^{-\mu x}$

Поток сообщ. лев., то его хочется передать.

Предположим:

P - вер-ть, что если сообщен. есть, то
она будет передана с вер. P .
вер-ти одинаковы и решение
приним. независимо.

Решение обратиться / не обратиться
принимается в момент либо
заверш. обслуж. предыд. либо
при поступлен. заявки.



Если есть k сообщений
то это в среднем с вер. P ,
сообщ. будет передано, если из k
обратится в канал ровно 1 ~~заявка~~

вер-ть успеха передачи: $k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1}$

$\lambda_k = \lambda$, $k=0, 1, 2, \dots$ ← скачки вверх
(приход заявок)
 $\mu_k = k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} \cdot \mu$ ← скачки вниз
(уход заявки)

$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{j(1-p)^{j-1}} P_0$ ← для вычисл. P_0
все складыв. и $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{j(1-p)^{j-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu p}\right)^k \frac{1}{k! (1-p)^{\frac{k(k-1)}{2}}}$

$k! \sim \frac{k^k}{e^k} \sqrt{2\pi k}$ $k^k = 2^{k \log_2 k}$ ← эта часть
расходится.

при $p = \frac{1}{2}$

$a_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{2^k e^k 2^{\frac{k(k-1)}{2}}}{2^{k \log_2 k}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} 2e\right)^k}{2^{k \log_2 k}} \cdot 2^{\frac{k^2-k}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

т.е. при данной модели без контроля нагрузки
будет быстрый перегруз.

Модель системы обслуживания с повторными
вызовами

Если прибор занят, то заявка "находится на
арбитре" и через случ. время снова
пытается пролезть.

Если приходит
заявка
и прибор
свободен,
то она
его займет
даже если
есть повторн.
↑
это не процесс гибели и рождения т.к.
для описания процесса придется
считать 2-мерный процесс
(может быть так, что на приборе есть
заявки, но обслуж. не идет)

Обслуживание - $1 - e^{-\mu x}$

Поступление - λ

Повторные обращения через случ. интервалы
распределения $1 - e^{-\lambda x}$

Марковск. процесс сост. из:

$$(L(t); n(t))$$

ка-то
повтор.
заявок

свободн. = 0, если свободен
= 1, если занят

обозн:

$$P_k^{(0)}(t) = P(L(t)=k, n(t)=0)$$

$$P_k^{(1)}(t) = P(L(t)=k, n(t)=1)$$

$$\Rightarrow \frac{dP_k^{(0)}(t)}{dt} = -(k+\lambda)P_k^{(0)}(t) + \mu P_k^{(1)}(t)$$

$$\frac{dP_k^{(1)}(t)}{dt} = -(k+\lambda+\mu)P_k^{(1)}(t) + (1-\delta_{k,0})P_{k-1}^{(1)}(t) \cdot \lambda + P_{k+1}^{(0)}(t) \cdot \nu$$

< много вычислений >

хотя решение находится методом пятифакторного упрощения.

Решение:

$$P_k^{(0)} = \frac{\rho^k}{k! \nu^k} \prod_{i=0}^{k-1} (\lambda + i \nu) (1-\rho)^{1+\frac{1}{M}}$$

$$P_k^{(1)} = \frac{\rho^{k+1}}{k! \nu^k} \prod_{i=1}^k (\lambda + i \nu) (1-\rho)^{1+\frac{1}{M}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Сеть Джексона

1 есть m узлов

1 дан й-ассоновский поток с парам. λ

заданы:

$$P_{01}, \dots, P_{0m}, \sum_{i=0}^m P_{0i} = 1$$

вер-ть, что поступивш. заявка будет направлена в i -й узел.

обслуживание в узле i имеет показательн. распредел. $M_i(1)$, т.е. ρ - число заявок в i -м узле.

В каждом узле рассматр. такая система, которая является процессом гибели и рождения.

После обслуживания в i -м узле заявка направл. в узел j с вер-то P_{ij} .
с вер-то P_{i0} - заявка покинет сеть.

$$\sum_{j=1}^m P_{ij} + P_{i0} = 1$$

$$L(t) = (L_1(t), \dots, L_m(t))$$

$$L_i(t)$$

вер-ть, что заявка гибели и рождения в i -м узле в момент времени t (дискретн. ин-во сост. и непр. время)

$$\text{опр. } P(\vec{k}, t) = P(L_1(t)=k_1, \dots, L_m(t)=k_m)$$

$$\vec{k} = (k_1, \dots, k_m)$$

$$\text{опр. } \text{Стационарно, если } \lim_{t \rightarrow \infty} P(\vec{k}, t) = P(\vec{k})$$

обозн:

$$\vec{0} = (0, \dots, 0)$$

б-натор-ноль

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$\uparrow$
 i

$$|\vec{k}| = k_1 + \dots + k_m$$

Чтобы $L(t)$ - б-н. эргодическим, нужно чтобы цепь б-н. неразложима и неперодич.

при этих условиях л-во предела будут = 0, л-во будут сход. к нек. ст-ц. распр. и $\Rightarrow$ цепь будет сильн-эргодич.

Теорема (Джонсона)

$$P(\bar{k}) = P(\bar{o}) \bar{P}(k_1, \dots, k_m)$$

$$\bar{P}(k_1, \dots, k_m) = \frac{\lambda^{|\bar{k}|}}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} \mu_i(j)} \prod_{i=1}^m y_i^{k_i}$$

условие, что в стан. режиме все узлы - свободны
находится из условия нормировки:

$$P(\bar{o}) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{|\bar{k}|}}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} \mu_i(j)} \prod_{i=1}^m y_i^{k_i} \right)^{-1}$$

условие эргодичности - это, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ с.с. по сумм. условию

$$y_i = \sum_{j=1}^m y_j p_{ji} + p_{oi}, \quad i=1, \dots, m$$

$$\bar{P}(\bar{k}) = P(\bar{o}) \prod_{i=1}^m \frac{\lambda^{k_i} y_i^{k_i}}{\prod_{j=1}^{k_i} \mu_i(j)}$$

т.е. возможна

т.е. узлы работают почти независимо, а вся зависимость заключается в интенсивности потоков

λy_i - интенсивности потоков

Пытались расширить возможность упрощения сети для больших видов сетей, но оказалось, что это невозможно, отказ от $\forall$ из условий (напр. отказ от того, чтобы поток был пуассонов - сразу приводят к проблемам в формулах)

Нашли лишь один особый случай (матрица приращений дивергентная) (матрица приращений)

не смотрят на то, что часто условие Джонсона не выполняется (нельзя упрощать сеть)

Значит все равно часто используют на практике (особенно это хорошо работает на нагруженных системах)

В общем случае для нестационарного распределения нельзя анализировать данные процесса гибели и рождения (данные для системы MIM/1/1) (там получ. ряды с бесконечными функциями)

Для сетей Джонсона также пытались найти нестационар. распределение, которое можно анализировать (он такой один, это и опишем):

Предположения:

1) В каждом узле система обслуживания с бесконечным числом приборов (оринков)

$\Rightarrow \mu_i(l) = \mu_i \cdot l$
(т.к. беск. число приборов $\Rightarrow$ все кто есть - все обслуживаются $\Rightarrow$ общая интенсивность линейна по числу заявок)

$$P(\bar{k}, 0) = \prod_{i=1}^m e^{-\lambda y_i} \frac{(\lambda y_i)^{k_i}}{k_i!}$$

где $y_1, \dots, y_m$ - матрица чисел

т.е., что начальное распределение - это распределение Пуассона

10.199

$$P(\vec{k}, t) = \prod_{i=1}^m e^{-\frac{\lambda y_i(t)}{M_i}} \frac{(\lambda y_i(t))^{k_i}}{M_i^{k_i} k_i!}, \text{ где}$$

$y_i(t)$ - решение системы дифф. уравн.:

$$y_i'(t) = M_i \left(\sum_{j=1}^m y_j(t) P_{ji} - y_i(t) P_{oi} \right), \quad i=1, \dots, m$$

нач. условие: $y_i(0) = y_i$

Для других сетей, где в явном виде решение не находится - разработано много числ. методов.

Вывод условия Джексона (2 стр. назад)

неразличимы и неприсущи. гарантир. перем. врт. и при этом произв-во.

можно составить уравнение равновесия и угадав решение (оно всегда единственно)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m M_i(k_i) + \lambda \right) P(\vec{k}) = \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{ji} M_i(k_i+1) P(\vec{k} + \vec{e}_i - \vec{e}_j) + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^m P_{oi} P(\vec{k} - \vec{e}_i) + \sum_{i=1}^m M_i(k_i+1) P_{io} P(\vec{k} + \vec{e}_i) \end{aligned}$$

это вер-те, что в сети ничего не изменилось.

это не было поступления + что продолжится все те же обслуживания.

что изменение произошло за счет завершения обслуживания в i -м узле и заявка могла либо прийти в узел j (т.е. мол. было на 1 заявку меньше).

в i -м узле заверш. обслуж. и заявка покинула сеть
произошло поступл-е. заявки из источ-ка в некоторый узел.

Джексона говорил так:
будем искать решение вида:

$$P(\vec{k}) = C \frac{\lambda^{|\vec{k}|}}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} M_i(j)} \prod_{i=1}^m y_i^{k_i}$$

подставив в уравнение равновесия, получим

$$P(\vec{k}) \left[\sum_{i=1}^m M_i(k_i) \left(-1 + \frac{1}{y_i} P_{oi} + \sum_{j=1}^m \frac{y_j P_{ji}}{y_i} \right) + \lambda \left(-1 + \sum_{i=1}^m y_i P_{io} \right) \right] = 0$$

потом Джексона решил это уравнение

Проверка статистических гипотез

1) проверка согласия -

проверка, какое распределение имеют случай. (т.е. мы наблюдаем за системой и по её параметрам определяем, действительно ли это, напр., показат. распредел.)

2) проверка однородности

- проверка, что случай. величины не меняют своего распределения с течением времени.
- проверка, можно ли считать наблюдений одинаково распределёнными.

т.е. ответы на вопрос: на сколько разн. машин предполагаемых при построении модели

0.01 (статистическая гипотеза:

какое предположение о виде распределения или его св-ва.

$$H_0: F(x) = F_0(x) \quad \text{— гипотеза}$$

выборка:

$X_1, \dots, X_n$ — наблюдений (для конкретного случая — это числа)

но при разработке методов для нас это случай. величины с распределением равным реальному распредел. св-ва.

Нужно сказать: "да", "нет", а гипотеза.

На самом деле мы отвечаем на вопрос: "верно ли", потому что если гипотеза не верна, то это чётко видно.

а вот отличать схожие гипотезы — трудно (наприм., экстрем. от гипотезы, которую мы почти не отличаем)

Если взять цилиндрическую функцию распределения, то при большой выборке она будет сходиться по вер-ти к распределению из гипотезы

или нужна некоторая мера отклонения.

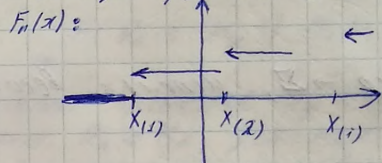
Эмпирическая функция наблюдений

$$F_n(x) = \frac{M_n(x)}{n}, \quad \text{где } M_n(x) \text{ — число наблюдений } \leq x$$

Порядковая статистика:

упорядочим наши результаты наблюдений.
 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$

Эмпир. функц. для порядк. статистики



Статистический критерий:

(какое распределение мер отклонения)
 $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ — это случай. велич.

"статистика Колмогорова"
критерий назыв. "критерий Колмогорова"

D_n — это для частн. случая — число и его нужно сравнить с нек. критич. значениями, чтобы сказать "эта гипотеза неверна" (подходя)

Критич. значения K_α могут выбирать из

α — "уровень значимости"

"размер критерия"

"вер-ть ошибки первого рода", т.е. вер-ть, что мы отвергли гипотезу, а она верна.

$$P(D_n \geq K_\alpha | H_0) = \alpha \quad \text{где } K_\alpha \text{ выбирается на основе } \alpha, \text{ а } \alpha \text{ —}$$

Чтобы по α найти K_α , нужно уметь находить значение случайной величины D_n

Хорошо, тогда D_n не завис. от F_0 , тогда для каждой таблицы не реш. задачу заново

(в-во статист. Колмогоров: если с.в.ч. независ, то D_n не завис. от F_0)

Практич. подход: - метод статистического моделирования. моделировать F_0 , а уже потом вычислять D_n , тогда вычисл K_α по α

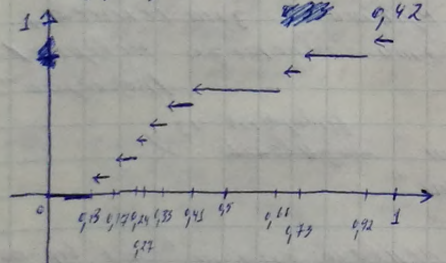
Другие критерии:

Омега², критерии $L_2, \dots$
(меньше брать вместо $\chi^2 \rightarrow \Sigma$, используя весовые функции)

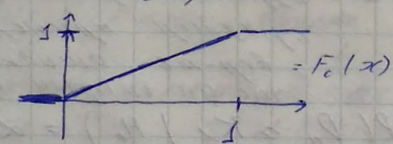
Пример:

$X_1, \dots, X_{10}$: 0,13 0,17 0,42 0,51 0,72 0,66
0,73 0,27 0,24 0,33

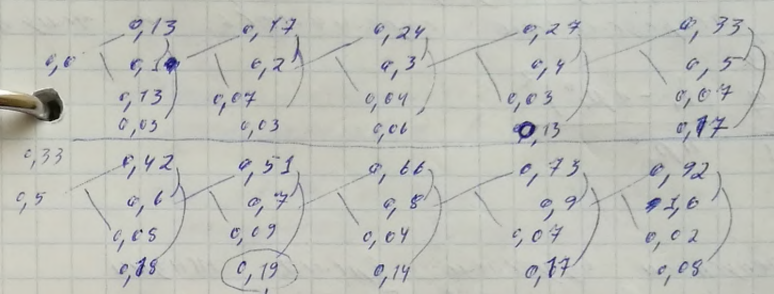
$X_{(1)}, \dots, X_{(10)}$: 0,13 0,17 0,24 0,27 0,33 0,42 0,51 0,72 0,73 0,92



Други править, чтобы было равнош. распредел. на $[0, 1]$



Итак χ^2 - критерий Колмогорова



$\chi^2 = 0,19 = D_n$

$n = 10$	$\alpha = 0,1$	$K_\alpha = 0,369$	Критерий
	$\alpha = 0,05$	$K_\alpha = 0,409$	Колмогорова
	$\alpha = 0,01$	$K_\alpha = 0,489$	

$P(D_n \geq K_\alpha | H_0) = \alpha$ - т.е. мы не отвергаем.

находим граничное $D_n < K_\alpha$ сразу при 0,01
после $D_n \geq K_\alpha$, для него есть α при 0,05
это то α , которое говорит, что если мы отвергнем гипотезу, то ошибка не будет чем на 2

статистическая гипотеза

это гипотеза с параметрами, т.е. параметры нужно будет вычислить уже потом, иначе эти параметры.

Критерии типа χ^2 - хорошо, потому что мало

частот статист. наблюд. гипотезы, но плохо то, что близкие гипотезы - плохо отличать друг от друга

χ^2 : Делим интервал и считаем сколько точек $X_1, \dots, X_n$ в него попадут

$P(X_i \in \Delta_i) = P_i$

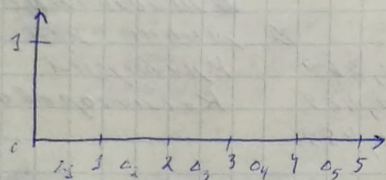
Значит если гипотеза не отвергается, то верная гипотеза

11. Необходимые условия для седловой точки у функции $K(x, y)$, определенной на множествах $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, $c_j \leq y_j \leq d_j$, $j = 1, \dots, m$.
 12. Найти седловую точку функции $K(x, y) = 8(4xy^2 - 2x^2 - y)$, определенной на множествах $X = Y = [0, 1]$.

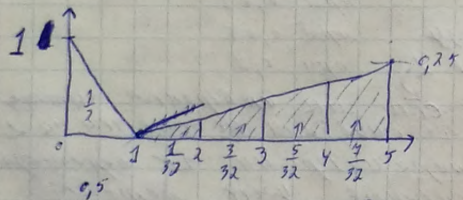
нормировочн. коэфф. подбирали так, чтобы при $n \rightarrow \infty$, распределение стремилось к чему-то хорошему

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(V_i - n p_i^0)^2}{n p_i^0}$$

Пример: допустим изучали время жизни телевизора в интерв. $[0, 5]$



1000	
1-90	90
2-120	80
3-500	330
4-670	170
5-1000	330



$$\chi^2 = \frac{(90 - 1000 \cdot \frac{1}{2})^2}{1000 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{(80 - 1000 \cdot \frac{1}{32})^2}{1000 \cdot \frac{1}{32}} + \dots + =$$

$$= 336 + 76.05 + 595.35 + 1.22 + 56.57 = 1065.288$$

число степеней свободы = 4 ~~н~~ = $n-1$
 т.е. числа гипотеза точно неверна.

Разные критерии хорошо работают на разных гипотезах.

Можно признать гипотезу верной если она никак не отвергается. никак ни критериями

54 (напр., χ^2 , Фишера, ...)

Другой подход проверки гипотез:

например для экстремиз. распределений

Показат. распределение отличатся от суммируемых логистических (т.е. от суммируемых нормальных)

это св-во можно положить в основу построения критериев

Критерий однородности

Постановка:

1) нам даны 2 выборки:

$X_1, \dots, X_n$ $Y_1, \dots, Y_m$

одинак. распр. $F(x)$ случ. вел.

одинак. распр. $G(x)$ случ. величины

т.е. каждая из выборок внутри себя распределена одинаково

F, G -нам не известны

(Вопрос) Гипотеза: $H_0: F(x) = G(x)$

Критерий однородности Смирнова

если $F = G$, то выборки должны быть близки.

$$D_{nm} = \sup_x |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|$$

эмпирич. функ. распредел. по $X_1, \dots, X_n$ по $Y_1, \dots, Y_m$
 применяются только, если F, G непрерывны (это описывается)

т.к. тогда 1) D_{nm} - независит от провер. H_0

$$P\left(\sqrt{\frac{n+m}{n+m}} D_{nm} < \alpha\right) = K(\alpha)$$

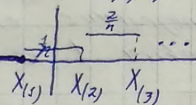
Потом это мы выбор. критич. значение из:

$$P(D_{nm} \geq K_\alpha | H_0) = \alpha = 1 - K(K_\alpha)$$

Даны $x_1, \dots, x_n$

порядковая статистика $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$

строим эмпир. функц.



Критерий Смирнова аналогичен критерию Колмогорова.

(Можно также адаптировать критерий χ^2)

Критерий χ^2 :

Есть нек. разбиение $\Delta_i: \Delta_1, \dots, \Delta_m$

V_{i1} - число наблюдений $x_1, \dots, x_{n_1}$ попавших в Δ_i

V_{i2} - число наблюдений $y_1, \dots, y_{n_2}$ попавших в Δ_i

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{1}{V_{i1} + V_{i2}} \left(\frac{V_{i1}}{n_1} - \frac{V_{i2}}{n_2} \right)^2$$

Утверждение:

Если наблюдения $z_1, \dots, z_{m+n}$ имеют одинаковое распределение, то как бы мы их не разбивали, у них всегда будет гипотеза внутри не будет отвергаться.

Для проверки гипотезы нужно:

- 1) перебрать числа n и m
- 2) перебрать разные разбиения.

Это для случая, если примени не 2 выборки, как в постановке задачи, а просто много чисел.

Проверка согласия для
экспоненц. распределения

Характеризация распределений:

использование лк или иных св-в гипотезы для ее проверки

(существует масса разных способов)

Рассматриваемое св-во $\rightarrow$ экспоненц. распределение - отсутствие последовательности.

1) Даны $x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow x_1$ и $\min(x_2, \dots, x_n)$ - имеют одинаков. распределен?

или

2) Даны $x_1, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ если $Y_i = (n-i+1)(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \Delta_i$ - независимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ распределение $x_1, \dots, x_n$ - показательное (экспоненциальное)

$$P(\min(x_1, x_n) \geq t) = P(x_1 \geq t) P(x_2 \geq t)$$

$\leftarrow$ т.к. x_1, x_2 - независимы

$$P(x_1 \geq \frac{t}{2})$$

следует из частн. случ. $x_1, \min(x_1, x_2)$

Таким образом мы свели задачу проверки согласия, к задаче проверки однородности.